Prédiction du comportement des solutions d'un modèle de type Fagacée

Patrice LOISEL, Pierre CARTIGNY, Jean François DHÔTE

UMR-ASB Montpellier, ONF Fontainebleau

19 Juin 2008

Contexte et Objectifs

Contexte :

- Gestion d'une forêt basé sur un modèle
- Etude de scénarios sylvicoles => optimisation

Contexte et Objectifs

Contexte :

- Gestion d'une forêt basé sur un modèle
- Etude de scénarios sylvicoles => optimisation

Objectifs :

- Analyse mathématique sans simulation
- Compréhension et influence de différentes fonctions ou parmètres (économiques) sur la sylviculture
- Généricité de la modélisation

Modèle Fagacées

Modèle Arbres Indépendants des Distances

Modèle Fagacées

Modèle Arbres Indépendants des Distances

Choix :

- Modèle avec une structure forte, lisibilité (fonctions)
- croissance potentielle limitée par imposition de contrainte
- liens avec Modèle de Peuplement
- passage à un modèle plus général : modèle générique
- structure permet **analyse mathématique sans simulation**

Modèle Fagacées

Modèle Arbres Indépendants des Distances

Choix :

- Modèle avec une structure forte, lisibilité (fonctions)
- croissance potentielle limitée par imposition de contrainte
- liens avec Modèle de Peuplement
- passage à un modèle plus général : modèle générique
- structure permet **analyse mathématique sans simulation**

Spécificités :

- forêt monospécifique, équienne
- variables : circonférence c à $1m30$ (et hauteur h)
- MAID (arbres individualisés) déterministe (pas d'effets aléatoires, pas d'aléas climatiques du type tempête)
- Stabilité de la dominance dans le temps

Plan et typologie des modèles

Continu

Modèle E.D.P.
Var. (s, t)

$\Longleftrightarrow$

Modèle E.D.P.
Var. de Lagrange (s_0, t)

$\updownarrow$ $\updownarrow$

Modèle Fagacées
Arbres Individualisés
(A)

Modèle classes de section s
(B)

Discrétisé

Modèle Fagacées

Arbre caractérisé par la section à 1m30 s_i ($h_i = h(s_i)$).

Modèle Fagacées

Arbre caractérisé par la section à 1m30 s_i ($h_i = h(s_i)$).

Densité des arbres limitée : **loi d'autoéclaircie**

$$\log(N(t)) \leq \log(N_{max}(s^*(t))) = K - \frac{q}{2} \log s^*(t), 1 < q < 2$$

$$=> \quad RDI = r(t) = \frac{N(t)}{N_{max}(s^*(t))} = K' N(t) s^*(t)^{\frac{q}{2}} \leq 1$$

Modèle Fagacées

Arbre caractérisé par la section à 1m30 s_i ($h_i = h(s_i)$).

Densité des arbres limitée : **loi d'autoéclaircie**

$$\log(N(t)) \leq \log(N_{max}(s^*(t))) = K - \frac{q}{2} \log s^*(t), 1 < q < 2$$

$$=> \quad RDI = r(t) = \frac{N(t)}{N_{max}(s^*(t))} = K' N(t) s^*(t)^{\frac{q}{2}} \leq 1$$

Compétition pour les ressources : **équation de répartition**

$V(r(t), H(t))$ apport énergétique potentiel

$H(t)$	: hauteur dominante indép. de la sylviculture
$g(r(t))$	: prise en compte des houpiers
$g(r(t))V(r(t), H(t))$	: apport absorbé par la forêt

$$=> \quad g(r(t))V(r(t), H(t)) = \sum_i \frac{ds_i}{dt}(t)$$

Modèle dynamique (A)

Discrétisation du temps : $0 = t_0 < t_1 < .. < t_k < .. < t_K = T$

$I(t)$: ensemble des indices des arbres présent à l'instant t

Modèle dynamique temps discret (équation d'état) :

$$\boxed{s_i(t_k) = s_i(t_{k-1}) + \Delta s_i(t_k)}$$

où $\Delta s_i(t_k) = f_\sigma(s_i(t_k)) = \gamma(\sqrt{s_i(t_k)} - \sigma(t_k))^+$ (Fagacées)

$$g(r(t_k))V(r(t_k), H(t_k)) = \sum_{i \in I(t_k)} \frac{\Delta s_i(t_k)}{\Delta t_k}$$

Problème d'optimisation modèle

$P(s,t) = p(s)\beta^t$: fonction prix unitaire par arbre de section s
$\beta < 1$ facteur d'actualisation

$$\max_{e_i(t_k)} \sum_{0}^{K-1} \beta^{t_k} \sum_{i \in I(t_k)} p(s_i(t_k)) e_i(t_k) + \beta^T \sum_{i \in I(T)} p(s_i(T))$$

$$\begin{aligned} e_i(t_k) &= 1 \text{ si coupe de l'arbre d'indice } i \text{ à l'instant } t_k \\ &= 0 \text{ sinon} \end{aligned}$$

Modèle dynamique continu

$n(s,t)$	densité d'arbres de section s à l'instant t
$e(s,t)$	prélèvement d'arbres de section s
$f_\sigma(s)$	croissance individuelle

Modèle dynamique temps continu, section continue :

$$\boxed{\frac{\partial n(s,t)}{\partial t} + \frac{\partial f_\sigma(s) n(s,t)}{\partial s} = -e(s,t)}$$

$$r(t) = An(t)E(s)^{\frac{q}{2}} = A[\int_s n(s,t)ds]^{1-\frac{q}{2}}[\int_s n(s,t)sds]^{\frac{q}{2}} \leq 1$$

$$\int_s f_\sigma(s)n(s,t)ds = g(r(t))V(r(t),H(t))$$

Lien avec Modèle Peuplement

Nombre total d'arbres : $N(t) = \int_S n(s,t)ds$
Surface totale : $X(t) = \int_S n(s,t)sds$

$$\frac{dN}{dt}(t) = -\int_S e(s,t)ds$$
$$\frac{dX}{dt}(t) = g(r(t))V(r(t),H(t)) - \int_S e(s,t)sds$$

$r(t) = AN(t)^{1-\frac{q}{2}}X(t)^{\frac{q}{2}} \leq 1$
Positivité de $n(s,t)$

Problème d'optimisation associé $\mathcal{P}$

$$\max_{e(.,.)} \int_0^T \int_S P(s,t)e(s,t)dsdt + \int_S P(s,T)n(s,T)ds$$

sous les contraintes $\int_S n(s,t)ds \geq \underline{n}$,
$0 \leq e(s,t) \leq \overline{e}(s)$
$r(t) \leq 1$

et les conditions initiales $n(s,0) = n_0(s)$

Modèle avec classes de section discrétisées (B)

Arbres de section $s_1 < s_2 .. < s_J$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dn_j(t)}{dt} &= -e_j(t) \\ \frac{ds_j(t)}{dt} &= f_\sigma(s_j(t)) \end{aligned}}$$

avec C.I. : $n_j(0) = n_{i0},\ s_j(0) = s_{i0}$

$$\sum_j f_\sigma(s_j(t)) n_j(t) = g(r(t)) V(r(t), H(t))$$

$$r(t) = A(\sum_j n_j(t))^{1-\frac{q}{2}} (\sum_j n_j(t) s_j(t))^{\frac{q}{2}} \leq 1$$

Modèle avec classes de section discrétisées (B)

Arbres de section $s_1 < s_2 .. < s_J$

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{dn_j(t)}{dt} &= -e_j(t) \\ \frac{ds_j(t)}{dt} &= f_\sigma(s_j(t)) \end{aligned}}$$

avec C.I. : $n_j(0) = n_{i0},\ s_j(0) = s_{i0}$

$$\sum_j f_\sigma(s_j(t))n_j(t) = g(r(t))V(r(t), H(t))$$

$$r(t) = A(\sum_j n_j(t))^{1-\frac{q}{2}}(\sum_j n_j(t)s_j(t))^{\frac{q}{2}} \leq 1$$

$$\boxed{\max_{e_j(.)} \int_0^T \sum_j P(s_j(t), t)e_j(t)dt + \sum_j P(s_j(T), T)n_j(T)}$$

Modèle dynamique temps continu avec une seule classe

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dn(t)}{dt} &= -e(t)\\ \frac{ds(t)}{dt} &= f_\sigma(s(t))\end{aligned}}$$

avec C.I. : $n(0) = n_0,\ s(0) = s_0$

$$f_\sigma(s(t))n(t) = g(r(t))V(r(t), H(t)), \quad r(t) = An(t)s(t)^{\frac{q}{2}} \leq 1$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{g(r(t))V(r(t), H(t))}{n(t)}$$

Modèle dynamique temps continu avec une seule classe

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{dn(t)}{dt} &= -e(t)\\ \frac{ds(t)}{dt} &= f_\sigma(s(t))\end{aligned}}$$

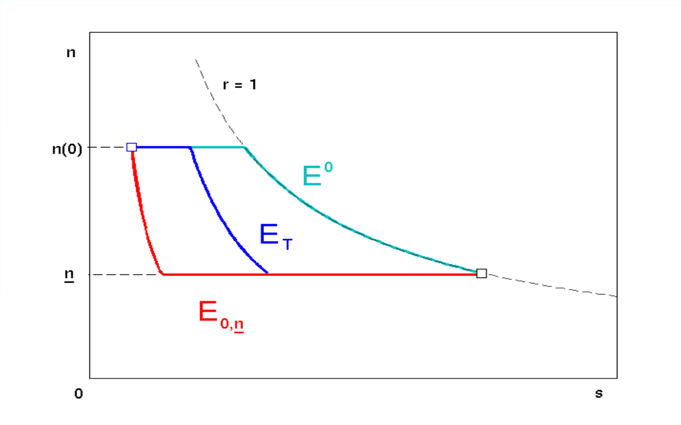
avec C.I. : $n(0) = n_0,\ s(0) = s_0$

$$f_\sigma(s(t))n(t) = g(r(t))V(r(t), H(t)), \quad r(t) = An(t)s(t)^{\frac{q}{2}} \leq 1$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{g(r(t))V(r(t), H(t))}{n(t)}$$

$$\boxed{\max_{e(.)} \int_0^T P(s(t), t)e(t)dt + P(s(T), T)n(T)}$$

sous les contraintes $n(t) \geq \underline{n}, 0 \leq e(t) \leq \overline{e}, r(t) \leq 1$


n
r = 1
n(0)
E^0
E_T
n
E_0,n
0
s

Trajectoires de référence :

$$[E_0] : \quad \begin{array}{lll} e(t) = \bar{e}, & n(t) > \underline{n}, & t < t_0 \\ = 0, & n(t) = \underline{n}, & t > t_0 \end{array}$$

$$[E^0] : \quad \begin{array}{lll} e(t) = 0, & r(t) < 1, & t < t^0 \\ = e_r(s(t), t), & r(t) = 1, & t > t^0 \end{array}$$

$$\left(t_0 = \frac{n(0) - \underline{n}}{\bar{e}}, \; e_r(s,t) = \frac{q}{2}\frac{V(1, H(t))}{s}\right)$$

Proposition *Supposons* $r(0) < 1, n(0) > \underline{n}$
(i) Si $G\bar{e}$ *"petit" et (p faiblement concave ou* $\beta \sim 1$ *et p fortement concave) alors la trajectoire optimale est la trajectoire* $[E^0]$*.*
(ii) Si $\beta \sim 1$ *et p convexe ou si* $\beta << 1$ *et p fortement concave alors la trajectoire optimale est la trajectoire* $[E_0]$

Conclusion et Perspectives

Conclusion

- Modèle simplifié $=>$ comportement complexe
- Permet typologie des résultats
- Analyse de l'influence des fonctions ou paramètres (alternative à une analyse de sensibilité)

Perspectives

- Prise en compte d'autres critères : multifonctionnalité
- Introduction d'aléas climatiques : tempête

Perspectives

Modèle générique

- prise en compte de nouvelles essences : gain de temps
- effectuer des comparaisons -> Peuplements mélangés
- gain en robustesse
- paramètrage plus riche

Chantiers en parallèles :

- Modèles génériques : cahier des charges
- Forêts mélangées (prospectif)